Richiami di teoria

- Sia $\mathcal{S}$ una superficie, con rappresentazione parametrica data da $T \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\overrightarrow{r} : T \to \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) \text{ regolare.}$$

Il versore normale a $\mathcal{S}$ è

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \right)$$

Flusso di un campo vettoriale attraverso $\mathcal{S}$

- Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $\overrightarrow{r}(T) \subset A$,

$$\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3 \quad \text{di classe } \mathrm{C}^1.$$

Il *flusso di* $\overrightarrow{F}$ *attraverso* $\mathcal{S}$ è

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S$$

con $\cdot$ il prodotto scalare. Quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S$$
$$= \iint_T \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}(u,v) \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

- Nel caso di $\mathcal{S}$ in forma cartesiana

$$\mathcal{S}: \ z = f(x,y), \quad (x,y) \in T \subset \mathbb{R}^2$$

si ha

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{i}_2 + 1\,\overrightarrow{i}_3\right)$$

quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S$$

$$= \iint_T \overrightarrow{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}_1 - \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{i}_2 + 1\,\overrightarrow{i}_3\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Il teorema di Stokes

• Sia $\mathcal{S}$ una superficie, con rappr. parametrica $\overrightarrow{r} : T \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ regolare e semplice e versore normale $\overrightarrow{n}$ e sia

$\Gamma = \partial\mathcal{S}$ (curva semplice, chiusa, reg. tratti)

orientata in modo da lasciare a sinistra il versore normale $\overrightarrow{n}$ di $\mathcal{S}$, e sia

$$\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3 \ \text{ di classe } \mathrm{C}^1.$$

Si ha

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$$

Si passa da un integrale di superficie a un integrale curvilineo!

Il teorema della divergenza

- Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato

- Sia $\mathcal{S} = \partial V$ la superficie bordo di V, regolare e chiusa, con versore normale $\overrightarrow{n}$

- Sia $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} \in C^1(A)$, con A aperto tale che $V \subset A$.

Allora

$$\iiint_V \mathrm{div}(\overrightarrow{F})\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S$$

ove

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Si passa da un integrale di volume a un integrale di superficie!